

Jens KLEB * (Germany)

Himmelsbeobachtungen und deren Messung, von der Regierungszeit des Gudea von Lagash bis zum *Almagest* des Claudius Ptolemäus

Celestial observations and their measurement, from the reign of Gudea of Lagash to the *Almagest* of Claudius Ptolemaeus

<https://doi.org/10.34739/his.2023.12.13>

Abstract: *The present article gives an overview on the development of the measurement and practical acquisition of circle section dimensions since the late 3rd millennium BC. In key points, the prerequisites and practical implementation for celestial observations over approx. 1500 years up to the 8th century BC are collected and analyzed, in terms of their logical requirements and connected archaeological findings. A comprehensible and unambiguous calculation is made for the celestial dimensions in cubits used from the 8th to the 2nd century BC, for which estimated values between 2.5 and 2.1 angular degrees have been determined since Kugler 1900 until to recently researchers. Therefore, for the first time, the exact transformation value is presented here. Not only the connections and the further development of this celestial measurement system are presented, but also its coherent adaptation up to the first definition and use of the angular unit measurement, which is still used today, around 200 BC. In addition, some data and their previous interpretation from various sources are put up for discussion, which even include the table of Chords, presented by Ptolemy in his *Almagest* and their use.*

Key words: Units of Length, Ptolemaeus, Chaldeans, angular measurement, old Babylonian diagonal calculation, table of chords, triangular calculation, apparent diameter Moon

Einleitung

Während über 2000 Jahre hinweg bis circa 200 v.Chr. die Berechnung von Kreisabschnitten nur mittels kurzer Sehnenabschnitte bzw. der kurzen Dreiecksseiten eines rechtwinkligen Dreiecks erfolgte, wurden danach mittels des neu eingeführten Winkelmaßes, beliebige Kreisabschnitte des Vollkreises und deren Sehnenabschnitte bis zum Durchmesser selbst bei 180° messbar. Dementsprechend unter-

* Corresponding Author. ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3304-2253>. j.kleb@siliqua.de

schied sich auch die Art der vorgenommenen Messungen, welche durch Mechanisierung auch immer schneller und präziser durchgeführt werden konnten.

Bereits im alten, auf den Umfang des gedachten Kreises bezogenen, Erfassungssystem gab es hierbei ständig Anpassungen an erreichbare also real messbare Auflösungen, oder auch an die Erfordernisse der zu beobachtenden Objekte. Von 6 gleichseitigen Dreiecken für den Vollkreis, bis zum 21600sten Teil eines Kreises (6x60x60 entsprechend 1' Winkelminuten) wurde diese Methode im betrachteten Zeitraum nachweislich angewandt. Es erscheint jedoch plausibel das für bestimmte Messreihen zum Beispiel bei der Beobachtung der Mondumlaufbahn und der über 18 Jahre währenden 'Saros'-zyklen, alte bestehende Messmethoden beibehalten und dabei auch noch höhere Genauigkeiten und demzufolge Bruchteile vom Fingermaß große Sehnenabschnitte gemessen worden sind. Darauf weisen zum einen die überlieferten Aufzeichnungen selbst, als auch die verschiedenen modernen Auswertungen hin, deren Schlussfolgerungen auch auf die Erlangung empirischen Wissens, also aus realer Messung, hinweisen.¹

Zur Verdeutlichung ist diese ältere Messweise, welche sich immer auf die größtmögliche Annäherung an den gedachten Umfangskreis bezog, mit der durch Eratosthenes vorgenommenen Umfangsbestimmung der Erde zu vergleichen. Hierbei bestimmte er einen 'verhältnismäßig' kleinen, aber dennoch messbaren Kreisabschnitt in der realen Länge (5000 Stadien) und dessen Anteil (1/50) im Verhältnis zum Vollkreis durch den Schattenwurf eines Stabes (vgl hierzu Pkt. 3.2.1 'Seqed'). Diese Werte wurden dann durch Vervielfachung (Multiplikation) in den gedachten vollständigen Umfang des Kreises überführt.²

Die Entwicklungsschritte von der Schaffung der Voraussetzungen um ca. 2200 v.Chr., über die Festsetzung der genutzten Maßsysteme auf dem Kreisumfang bis zum neu geschaffenen längenunabhängigen Winkelmaßsystem ab ca. 200 v.Chr., wird anhand von Berechnungen und archäologischen Belegen im Einzelnen aufgezeigt.

Hierbei zeigt sich vor allem in der Zeit der Festlegung des Winkelmaßes das Vorhandensein von bereits 2 genutzten Maßsystemen. Die von Epping schon 1889 diesbezüglich geäußerten Vermutungen und Größen bestätigen sich durch die hier dargelegten Berechnungen in eindrucksvoller Weise.³

Durch das Winkelmaßsystem entstanden neue Möglichkeiten für die Verkleinerung der Geräte und die noch universellere Dokumentation von Beobachtungen, jedoch unterschieden sich die jeweiligen Winkeldifferenzen je nach Größe in ihrem messbaren Längenabschnitt des Umfangs, der Sehne.

Je nach gemessener Winkeldifferenz variiert dabei zusätzlich der Streckungsfaktor der zugehörigen Sehne. Dies machte für die praktische, sowohl astronomische

¹ Brack-Bernsen, 1997: 46.

² Rogers, 1960.

³ Epping, 1889: 116.; vgl. auch Kugler, 1900: 127.

wie auch terrestrische Nutzung, die Sehnentafeln erforderlich. Mit diesen konnten jedoch Transformationen vom Umfangs- (Kreissehnen) Messsystem und dem Winkelmesssystem in beide Richtungen leicht vorgenommen werden.

Vorgehensweise, Analyse des bisherigen Wissens und die frühesten archäologischen Quellen im Zusammenhang mit der Messung am Kreis

Bei den vielfältigen Untersuchungen zur altbabylonischen zur neobabylonisch-chaldäischen und auch achaemenidischen Astronomie bis zur Neuzeit, wurde auf die erreichten Leistungen, die Präzision und auch das komplexe Verständnis der Natur der damaligen Astronomen und Mathematiker bereits in weitreichendem Umfang eingegangen. Mit dieser Arbeit soll deshalb diesbezüglich nichts hinzugefügt werden, doch stellte sich die bisher wenig beleuchtete Frage wie und auf welcher Basis diese Erkenntnisse gewonnen werden konnten. Überlieferungen oder Beschreibungen von Geräten, oder wie die Messungen zwischen dem frühen 2. Jahrtausend bis ungefähr 200 v.Chr. durchgeführt worden sind, sind uns nicht bekannt.⁴ Dennoch lässt sich sehr plausibel und anhand archäologischer Belege, sowie aus mathematischen Zwängen heraus darlegen, wie sich die Messmethoden und mit Ihnen die Messgeräte entwickelt haben müssen. Selbstverständlich kann es lokale Unterschiede, Parallelwege und regionale zeitliche Verschiebungen gegeben haben, doch die Grundzüge bleiben gleich.

Analyse des bisherigen Wissens

Wir wissen aus archäologischen Belegen und modernen Analysen, das ab Mitte des 3. Jahrtausends v.Chr. und spätestens manifestiert durch die Statuen des Gudea von Lagash [Nippur-Elle, antiker Norm-Maßstab aus Nippur, im İstanbul Arkeoloji Müzeleri; Musée du Louvre, inv. AO2], eine Reform der Längenmaße stattgefunden hat.⁵ Hierbei wird als Begründung, die Vereinfachung und Universale Nutzung, aber vor allem eine notwendige Harmonisierung der Welt durch das neue Systems angeführt.⁶ Gleichzeitig wusste man, dass die bisherigen Maße entsprechend dem Nippur-system (siehe Nippurelle), einen hohen astronomischen Bezug hatten und für die Ganzheit der Natur nach damaliger Vorstellung standen.⁷

Gemäß dem sicher zu allen Zeiten gültigen messtechnischem Grundprinzip, 'vom Großen ins Kleine' festgelegt, basierten die ältesten Maßsysteme bzw. deren reale Längen auf der Teilung von beobachteten Himmelsphänomenen und deren zuge-

⁴ Waziry, 2016.

⁵ Rottländer, 1979: 8, 43f.

⁶ Walden, 1931.

⁷ Rottländer, 2006.

hörigen Zeitabständen. In kleinere Abschnitte geteilt, wurden diese gewonnenen Maße dann an bereits vorher bekannte menschliche Proportionen, wie Elle, Fuß, Hand oder Finger adaptiert. Die beobachteten zumeist wiederkehrenden Ereignisse und Zeitabläufe wurden zu diesem Zeitpunkt mit Bewegungen auf Kreisbahnen erklärt. Der reale Umfang eines Kreises genoss deshalb eine hohe geometrische und auch philosophische Bedeutung, für das Wiederkehrende, das Vollkommene und auch das Ganzheitliche.

Aus diesem Grund wurde bei der Maßreform des Gudea von Lagash, auch nur die Aufteilung der Einheiten, innerhalb des normal genutzten Längenbereichs für Berechnungen, vom Messrohr dem späteren Klafter und kleiner, abgeändert.⁸

Zur einfachen aber abstrakten Veranschaulichung genau dieser Änderung und der auch hier im Folgenden genutzten Begrifflichkeiten ‘äußere’ und ‘innere’ Einheiten sei, da es aus Sicht des Autors kein besseres jedem Leser bekanntes Bild gibt, auf da Vinci’s Darstellung des vitruvianischen Menschen verwiesen [Gallerie dell’Accademia, Venice, n. 228]. In diesem Bildnis ‘verkörpern’ die innerhalb des Kreisumfangs liegenden Dimensionen, wie auch das Klafter, entsprechend den beidseits ausgestreckten Armen, die ‘inneren Maße’, welche durch die Maßreform entsprechend den realen Proportionen angepasst wurden und so mit dem Kreisumfang den ‘äußeren Maßen’ wieder in Harmonie gebracht wurden.

Es wird jedoch deutlich, dass eine solche innere Maßreform, nur in Verbindung mit Messungen am Kreis und dessen realem Umfang, die gewünschte Ganzheitlichkeit und den Einklang mit der Natur verkörpert. Ansonsten wäre die Reform nicht nötig gewesen und hätte auch keinen langen zeitlichen Bestand gehabt.

Dass bereits im 3. Jahrtausend v.Chr. bekannt war, dass der Umfang eines Kreises nicht gleich 3 war, erscheint dabei auch nur zu logisch. Konnte man doch selbst bei einem nur 2 Ellen Durchmesser großen Rad sofort nachweisen, dass dessen Umfang größer als 6 Ellen ist. Hierbei war die Längenmehrung von 7,5 Fingermaßen sowohl klar erkennbar, wie auch einfach messbar. Da anfänglich sicher der Kreisoeffizient von 3 auch vom realen Umfang von sechs um einen Mittelpunkt zusammengesetzten equilateralen Dreiecken mit Seiten von $60 = 1 (6 \times 60 = 360)$ abgeleitet wurde⁹ und dieser den Kreis verkörpern sollte, musste nun bei weiterer Annäherung mittels immer kleinerer Abschnitte an den Kreis, auch dies wieder berücksichtigt werden.

Für vielerlei alltägliche Berechnungen wäre ein angepasster, dann jedoch ungerader Koeffizient des Kreisdurchmessers zum Umfang sehr unpraktisch gewesen. Einfachere Rechnungen selbst bei Geometrien mit dem Kreis, wurden so auch während des frühen 2. Jahrtausend v.Chr. weiterhin mit dem Koeffizienten von 3 und dessen

⁸ Rottländer, 1979: 43; Kleb, 2016.

⁹ Bruins & Rutten, 1961: 1-45.

Reziprokom 20 gerechnet.¹⁰ Gleichzeitig lässt sich aber nicht nur aus den Überlieferungen der Venustafeln des Ammi-Saduqa eine starke Fokussierung auf Ereignisse am Himmel und deren gedachte Kreisbahnen erkennen.¹¹ Für diese besonderen Anwendungen, war die Berücksichtigung der Umfangslängung entsprechend unumgänglich. Langjährige immer wiederkehrende und dabei genaue Beobachtungen bedurften der äußeren Maße um die erfassten Abschnitte dieser Kreisbahnen auch korrekt aufsummieren zu können. Solche Beobachtungen konnten jedoch nur mittels der Nutzung von gleichschenkligen bzw. rechtwinkligen Dreiecken erfasst und berechnet werden. Um genaue Berechnungsergebnisse zu gewährleisten war demzufolge die Nutzung der 'korrekten' inneren Maße für die Messgeräte eine Grundbedingung.

Die weiterhin universelle Teilbarkeit des Kreises und die schnelle Ablesbarkeit an dem sich öffnenden Dreieck waren wichtig. Denn gemessen wurden nur Kreisabschnitte, also Teile eines dem realen Kreisumfang angenäherten Vielecks aus Sehnen. Um derartige Berechnungen zu vereinfachen und die festgestellte Längung des Umfangs zu berücksichtigen, ist ein entsprechend verkürztes inneres Maßsystem zum Beispiel beim Kreisdurchmesser die einfachste Anpassung. Es ist deshalb plausibel, dass die Reduktion des Nippurmaßsystems und die damit einhergehende Verkleinerung des zugehörigen Fingermaßes genau dieser besseren und harmonisierten Nutzung, geschuldet war.

Es scheint hierbei, gegenüber unserer heutigen Nutzung der Kreiszahl π , im babylonischen eine weiterbestehende Teilung dieses Wertes gegeben zu haben. Zum einen der überall überlieferte Kreiskoeffizient von 3 und zum anderen die bei Bedarf anzusetzende Umfangslängung (Streckungsverhältnis) zum Maßsystem des Durchmessers. Beide Werte miteinander multipliziert, würden somit die damals genutzte Kreiszahl ergeben. Die mehrfach in der Literatur und an Fundstücken belegten Maße der beiden Systeme 'Nippur' und 'Gudea' stehen im nachweisbaren Verhältnis von $1.2.30$ zu 1 und beschreiben so diese Umfangslängung. Die Schreibweise als Bruch verdeutlicht hier noch einmal den genutzten Streckungsfaktor: $375/360$. Zur weiteren Verdeutlichung sei hier im Vorgriff auf die im Detail hier später angesprochene Zeit des Ptolemäus gesagt, dass dieser in seinen Sehnentafeln den Streckungsfaktor $1.2.50$ nutzte, was $377/360$ entspricht und eine noch bessere Näherung an die Realität bot. Miteinander multipliziert führt uns Gudea's Maßreform zu einer Kreiszahl von $3 \times 1.2.30 = 3.7.30$, dies sind dezimal $3,125$ und damit auch schon rund 2200 v.Chr. zu einer sehr guten Näherung an den realen Kreisumfang.

¹⁰ Kleb, 2022.

¹¹ van der Waerden, 1942; Weir, 1982.

Im ‘inneren’ Gudea Maßsystem angegebene Realmaße zur Verdeutlichung:

2 Gudea (30) Ellen = $0,99488\text{m} \times 3$ [babylonischer Kreiskoeffizient] = 2,98464m also
6 Gudea (30) Ellen x Streckungsfaktor 1.2.30, [dezimal 1,0416p6] = entsprechen so einem
Kreisumfang von 3,109m zum ursprünglich angegebenen Durchmesser. Aus den 6.15
[375/60] Gudeaellen werden so wieder die 6 [360/60] Nippurellen. Diese exakt 6 Ellen (30)
des Ursystems von Nippur haben eine nachgewiesene Länge von 0,51816m.¹²

Dass neben dem eingeführten Gudea Maßsystem, auch weiterhin das Nippur Maßsystem selbst in kleinen Einheiten in Gebrauch war, unterstreicht das hier dargelegte parallele und sich einander bedingende Nutzungsprinzip. Eine weitere Bestätigung findet man zusätzlich auf den im Louvre in Paris ausgestellten Statuen des Gudea selbst. Dort lässt sich neben dem zu erwartenden Gudeamaß, auch das alte Maßsystem durch 3,5 Nippur-Finger hohe Zeilen mehrfach nachweisen [Musée du Louvre, inv. AO2]. Während Rottländer hier eine Rückwärtsgewandtheit von Gudeas Steinmetz vermutet, erklärt sich mit der hier dargelegten Nutzung dieser Maße die gleichzeitige Darstellung beider Maße auf einer Statue.¹³

Erste Fragestellungen und Antworten

An dieser Stelle könnte man bereits hinterfragen weshalb denn, wenn die Streckung des Umfangs bereits bekannt und in ihrer Größe berechnet wurde, man nicht weiterhin die Urmaße der Elle von Nippur auch für den ‘inneren’ Durchmesser des Kreises benutzen konnte. Dies widersprach jedoch grundsätzlich und wie schon am Anfang dieses Kapitels erläutert der höheren Wertigkeit dieses Urmaßsystems, welches gerade im Äußeren nicht verändert werden sollte. Dabei war auch die durch die gleiche 360er Teilung gegebene Verknüpfung mit den Zeiteinheiten ein entscheidender Punkt. Ein allein in üblichen Nippur Maßeinheiten im Durchmesser (dementsprechend im Inneren) erstellter Kreis, würde so im realen Umfang (äußeren System) zu einer hierzu ungleichen Teilung führen.

Für die Beobachtung beliebiger Objekte am Himmel, war die korrekten Messung und Addition von Kreisabschnitten aber unerlässlich. Ein im kleineren (Inneren) System errichtetes Messsystem, stellt bei direkter Ablesung, ohne Konvertierung, das Äußere, größere und ursprüngliche Maßsystem dar. Unter diesen Proportionen waren so Messgeräte in der Form gleichschenkliger oder auch rechtwinkliger Dreiecke möglich und die gemessenen Sehnen entsprachen der (angenäherten) Realität. Aber auch andere Umfangsbasierte, also aus der astronomischen Beobachtung heraus bestimmte Maßsysteme wurden so aus dem Inneren heraus (vom Betrachter im Inneren

¹² Kleb, 2016.

¹³ Rottländer, 1979: 9.

gesehen = Topozentrum) korrekt in Kreisabschnitten messbar. Hierbei ist das Verhältnis der Systeme zueinander 1 (Gudea) : 1.2.30 (Nippur) und wie sich im Weiteren zeigen wird, für das astron. Maß (Mond/Sonne) 1.6.40.

Dass diese feste Kopplung zwischen Umfang (äußere Maße) und Durchmesser (inneres Maß) bis mindestens ins 2. Jhd. v.Chr. bestand hatte, zeigen die Ausführungen des folgenden Kapitels.

Für die Art der damaligen Messungen waren dementsprechend drei Bedingungen essentiell:

- Die Messungen mussten schnell und einfach ausführbar sein, da die Beobachtungsobjekte sich ja scheinbar bewegten.
- Das Messgerät musste handhabbare Dimensionen haben und dabei über vertraute überall überlieferte Maßproportionen verfügen.
- Auch einzeln gemessene Kreisabschnitte, also Sehnen, mussten sich trotz der bekannten Aufweitung des Umfangs (äußeres Maßsystem) entsprechend Ihrer Größe zu einem Vollkreis aufsummieren lassen, egal in welche Richtung, oder mit welcher Neigung man vom Beobachter aus zum jeweiligen Objekt schaute. Dies entspricht den Grundprinzipien späterer Hilfsmittel wie, Armillarsphäre, Astrolab, Ekliptikscheibe etc. Auch Herons Dioptra ist der Beschreibung nach eher ein astronomisches Messgerät.¹⁴

Als Kurzfassumee kann man festhalten, dass man mindestens seit dem späten 3. Jahrtausend v.Chr. vom Unterschied der ‘inneren Maße’ also dem Durchmesser, zum sich bei üblicher Kalkulation ergebenden ‘äußeren Maß’, dem Umfang, wusste.

Hierbei wurde durch die Reform des Gudea von Lagash, genau dieses Problem beseitigt. Die auch von Rottländer, Walden und anderen bereits analysierte und notwendige Wiederherstellung der ‘Ordnung der Welt’ wurde auf diese Art vollzogen.¹⁵

Die Entwicklung der Kreismessung und deren astronomische Nutzung über zwei Jahrtausende, Analysen und Berechnungen

Wichtige Festlegungen zu dieser Arbeit

Vereinbarungen zur Art und Darstellung der Berechnungen

Alle hier angegebenen Maße beziehen sich, wenn nicht anders angemerkt, auf eine Umfangsstreckung von 375/360, also dem Streckungskoeffizienten 1,041p6 [1.2.30]. Multipliziert wird dieser mit dem Kreiskoeffizienten von 3 wie er seit altbabylonischer Zeit bekannt ist. Zusammengefasst entspricht dies so der Kreiszahl π mit

¹⁴ Kleb, 2019.

¹⁵ Walden, 1931; Rottländer, 2006.

einem Wert von 3.125. Vorprogrammierte Rechner online oder offline, welche mit dem heute exakten π -Wert bzw. Winkelangaben im Bogenmaß rechnen, ergeben deshalb unterschiedliche Zahlenwerte gegenüber den hier angegebenen!

Für Kontrollen muss dies deshalb berücksichtigt werden, oder zum Beispiel für korrekte dezimale Winkelangaben mit dem Faktor $(3,125/\pi)$ korrigiert werden. Alle hierfür notwendigen Angaben sind in dieser Arbeit enthalten. Dezimalzahlen sind mit , (Komma) dargestellt. Unendliche Dezimalzahlen enden mit ... (3 Punkt) , periodische Zahlen sind mit ‘**p**’ und der ab dann folgenden Periodenzahl dargestellt (zum Beispiel 2,133p3). Sexagesimale Zahlen haben Stellenverknüpfungen per . (Punkt) und sind *Kursiv* dargestellt. Alternative Zahlendarstellungen, wenn notwendig, werden in [0] (eckige Klammern) gesetzt. Längenangaben sind ohne weitere Angaben auf max. 5 Nachkommastellen gerundet. Bei Ellen/Cubit Angaben wird zur eindeutigen Zuordnung die in (..) Klammern gesetzte Fingerzahl hinzugefügt.

Die Entwicklungsschritte der Kreis und Kreissegmentmessung mit Beispielberechnungen

Der Beginn der genaueren Messungen ab ca. 2100 v.Chr.

Anfänglich wurden selbst für einfache Messungen und Angaben die Verhältnisse und so die Steigung der Dreiecksseiten zueinander durch deren Verhältnisse zur Basis oder der Höhe gleich 1, in rechtwinkligen Dreiecken angegeben. Es zeigte sich das durch ‘*ukullû*’ das Steigungsverhältnis, die sich jeweils zur Basis ändernde Diagonale ‘*šiliptim*’, oder auch im altägyptischen durch das Steigungsverhältnis ‘*Seqed*’, Vorteile bei der geometrischen Beschreibung erzielt werden konnten [Tab. 2, Schritt 1].¹⁶

Sowohl das altbabylonische Steigungsverhältnis ‘*ukullû*’ wie auch sein geometrisch identisch zu interpretierendes ägyptisches Pendant ‘*Seqed*’ beziehen sich auf die für uns heute ungewöhnliche fix gesetzte Höhe (der im rechten Winkel lotrecht auf der Basis stehende Schenkel) des Dreiecks von 1. Dies lässt sich jedoch in der praktisch veranlagten damaligen Welt einfach mit einem senkrechten Schattenstab erklären. Die Länge des gedachten Schattens die ein exakt eine Einheit langer senkrechter Stab auf den Boden neben sich wirft, ist sein ‘*Seqed*’ bzw. ‘*ukullû*’.

Ein ‘*ukullû*’ von 1 ist demzufolge gleich einer Diagonale von $\sqrt{2}$, welche unter Anderen, auf der Keilschrifttafel YBC 7289 als sehr gute Näherung mit 1.24.51.10 belegt ist.¹⁷

¹⁶ DCCMT; Kleb, 2021.

¹⁷ Kleb, 2022.

Dabei veränderte sich jedoch immer der Bezugs- bzw. Umfangskreis für jedes Steigungsdreieck. Obwohl so bereits genaue Anteile des Vollkreises im Horizontsystem und dessen zur Ebene der Ekliptik geneigten Adaption dokumentiert werden konnten, wurde das Erfassungssystem weiterentwickelt.

Zu einem noch nicht genau rekonstruierbaren Zeitpunkt im 2. Jahrtausend v. Chr., legte man so den Bezugskreis des Messdreiecks auf den festen Durchmesser $1=60$ fest [Tab. 2, Schritt 2]. Alle dabei innerhalb des Kreises entstehenden Steigungsdreiecke sind ja ebenfalls rechtwinklig, wie man ganz sicher nicht erst seit Thales von Milet wusste. Für die Erkenntnis, dass der Durchmesser des Umkreises gleich der Diagonale des in diesem Kreis eingeschriebenen Rechtecks ist, sei aus altbabylonischer Zeit und nur beispielhaft hierfür eine Aufgabe der Keilschrifttafel BM085194, ab r I33, angeführt.¹⁸

Der Bezug zur Ekliptik wurde in folgender Zeit, wie die Einteilung in 12 gleichgroße Abschnitte mit deren symbolhaften Sternbildern belegt, im wichtiger.¹⁹

Die weitere Entwicklung des Messsystems schuf zusätzlich die Möglichkeit, Abstände zwischen Sternen, oder Planeten direkt und auch unabhängig vom Horizont, Himmeläquator oder auch der Ebene der Ekliptik zu messen. Vom Betrachter wurde jeweils eine virtuelle Ebene zwischen 2 Beobachtungsobjekten errichtet und deren Abstand bzw. Sehne zueinander, als Kreisabschnitt dieser Ebene aufgefasst [Tab. 2, Schritt 3]. Diese topozentrische Betrachtungsweise und Messung kennzeichnet den Beginn der Astrometrie und der Messung von beliebigen Orten am Himmel. Gleichzeitig war aber auch durch diese Betrachtungsweise, als weitere Anpassung, die Teilung der Diagonalen im Mittelpunkt des Kreises notwendig. All diese gedachten Kreisebenen hatten ihren Mittelpunkt immer im Auge des Betrachters auf der Erde (topozentrisch). Eingepasst in die 12 Sektoren der Sternbilder konnten so bereits Sternörter definiert werden, welche dann in weiteren Entwicklungsschritten in Richtung und Höhe als feste Koordinaten eines Objektes festgehalten wurden [Tab. 2, Schritt 4].

Spätestens für das 8. Jhd. v. Chr. ist uns solch ein vermutlich sogar schon weiter verfeinertes Messsystem aus überlieferten Datensammlungen auf Keilschrifttafeln bekannt.²⁰ Diese Verfeinerung, also Weiterentwicklung begründet sich aus der im folgenden Abschnitt vorgestellten Analyse, dass die zugrunde liegende Basiseinheit dieses Systems, bereits vom Wert von 1 auf 6 erhöht wurde. Dies entspricht so bereits zu dieser Zeit einer Versechsfachung der messbaren Genauigkeit. Hierauf soll im Folgenden im Detail eingegangen werden.

¹⁸ DCCMT; Kleb, 2022.

¹⁹ Hunger & Pingree, 1989; Watson & Horowitz, 2011.

²⁰ Neugebauer, 1954; Fatoohi & Stephenson, 1997; Graßhoff & Ossendrijver, 2017; Ossendrijver, 2020.

Das neobabylonische und chaldäische astronomische Mess- und Maß-system

Die Erfordernisse und Aufgaben der neue Messmethode bestanden neben dem zuvor dargelegten, aber auch darin die über viele Jahrhunderte zu sammelnden Daten, trotz der verschiedensten gesellschaftlichen und kulturellen Anpassungen, normiert und exakt ineinander transformierbar zu erfassen. Eine dabei ohne astronomischen Bezug festgelegte Maßeinheit, aber gleichzeitig, basierend auf dem Wissensstand des 2.Jahrtausend v.Chr., auch messbaren Referenzgröße, ist in Anbetracht des Zwecks und dem Leben der Gesellschaften mit den Himmelsphänomenen, nicht vorstellbar.

Die dabei jedoch entstehende technische Herausforderung musste ihrerseits, mittels genau festgelegten Proportionen und einer vielleicht sogar möglichen Eichung oder Kontrolle, für alle genutzten Messgeräte gelöst werden.

Im Ergebnis besann man sich auf eine vermutlich schon früher benutzte relative Konstante, die für alle Beobachter nahezu gleich war. Den scheinbaren Sonnen- bzw. Mond-durchmesser.

Plausibel, erfolgte diese Festlegung einfach durch die Beobachtung der scheinbaren Bewegung der beiden Himmelskörper und der vergangenen Zeit, bis sie genau einen Durchmesser weiter 'gewandert' waren. Diese Messungen wurden sicherlich mehrfach wiederholt und so gemittelt.

So fand man den Zeitwert von 2.8 [2,133p3] und legte diesen als Maßbezug fest. Dabei ist es prinzipiell unabhängig, ob vielleicht der Tag nur in 12 Doppelstunden oder auch anders eingeteilt wäre, da die scheinbare Bewegung von Mond oder Sonne um einen scheinbaren Durchmesser, dann auch proportional diesem Zeitabschnitt gewesen wäre.

Auch heute gilt: $86400\text{Sek.}/d = 360^\circ$; $3600\text{Sek.} = 1\text{h} = 15^\circ$; $120\text{Sek.} = 2\text{Min} = 0,5^\circ = 30'$; $2\text{Min.}8\text{Sek} = 0,533p3^\circ = 32'$. Im Allgemeinen kennen wir auch heute noch diese Einteilung in astronomischen Systemen, als Zeitmaß oder auch Stundenwinkel.

In einen idealen Kreis von 360 Teilen, passten so 675 dieser festgelegten scheinbaren Durchmesser. Auch im Sexagesimalen entsprach dies 32, denn $32 \times 11.15 = 6$ [= 6×60] [Fig. 1].

Bezogen auf einen Kreis mit 720 Teilen ($a\ 0^\circ 30' = 0,5^\circ$), war diese Einheit also etwas größer als $0,5^\circ$. Aus dem Verhältnis $720/675 \times 0^\circ 30'$ ergibt dies eine im heutigen Winkelmaß betrachtete eine $32'$ Winkelminuten große Grundeinheit, entsprechend dezimal $0,533p3^\circ$.

Sicherlich gab es auch Überlegungen der babylonischen Astronomen und Mathematiker, ob der scheinbare also sichtbare Durchmesser in Wirklichkeit eine Nuance größer oder kleiner war, doch bei der Festlegung der Maßgröße selbst wurde

neben der Übereinstimmung mit der Zeit auch besonders auf dessen Teilbarkeit geachtet.

Analog wurden zum Beispiel auch die bisherigen durch moderne Auswertungen vorgeschlagenen Werte von $2,5^\circ$ bis zu $2,0^\circ$ pro astronomische Elle,²¹ in die Voruntersuchungen zu dieser Arbeit einbezogen. Die durch den Autor im Detail überprüften Varianten, oberhalb und unterhalb des festgelegten Wertes, zeigten nur für die Werte 2.8; 1.4 bzw. 32 eine optimale Teilbarkeit, sowohl im sexagesimalen Zahlensystem wie im dezimalen Zahlenbereich.

In der Gesamtschau auch des babylonischen Denkens jener Zeit, hat das hier vorgestellte Referenzmaß auch durch das dabei entstehende, oder eventuell auch wiederbelebte Maßsystem für das es zahlreiche archäologische Belege gibt, eine hohe Plausibilität und wird zusätzlich durch die nachfolgenden Berechnungen bestätigt.

Welcher der beiden Himmelskörper initial für die Festlegung dieses Wertes genutzt wurde kann nicht festgestellt werden. Doch da man selbst 1000 Jahre später, in Ptolemäus' *Almagest*,²² von der prinzipiellen Gleichheit der beiden scheinbaren Durchmesser ausging und das astronomisch genutzte System nach dem Untergang des Zentralgestirns zum Einsatz kam, kann man zumindest von einer dann späteren Zuweisung zum Mond als Bezugsgröße ausgehen. Bei der Vielzahl der Messungen und auch Meßgeräte, über die hier betrachteten Zeiträume hinweg, waren aber in jedem Fall, ganz sicher die als Referenzmaß heranzuziehenden und jederzeit verfügbaren scheinbaren Durchmesser der beiden Himmelskörper eine gern genutztes Kontrollmaß der alten Astronomen.

Im Folgenden wird zur Vereinfachung in dieser Arbeit, bezüglich der genutzten Grundeinheit nur auf den scheinbaren Durchmesser des Mondes verwiesen, da dieser eine höhere Plausibilität als Referenz-/Bezugsmaß des Maßsystems hat.

Spätestens seit dem 8 Jhd. v.Chr. ist eine Unterteilung und Angabe von Stern-
distanzen in Elle und Finger bekannt, entsprechend Neugebauer, Fatoohi und auch Ossendrijver entsprach eine solche astronomische Elle aber keinem geradzahligen Wert im heutigen Winkelmaß.

Kugler verweist mehrfach darauf, dass Hipparch durch komplette Übereinstimmung seiner Daten indirekt belegt, dass er dabei auf, über lange Zeiträume, mindestens aber über das gesamte 1. Jahrtausend v.Chr. in Babylon gesammelte Daten wurden, zurückgriff.²³

Für die Chaldäer und die Priesterastronomen der seleukidischen Ära (hier speziell im 2 und 1. Jhd v.Chr.) belegt Kugler ebenfalls, das bereits mit Genauigkeiten von wenigen Winkelsekunden bei der Angabe zyklisch wiederkehrender Ereignisse

²¹ Kugler, 1900: 114; Ossendrijver, 2011.

²² Ptolemaeus, 1961: B6, Ch7.

²³ Kugler, 1900.

gearbeitet wurde.²⁴ Da diese Genauigkeiten kaum mehr mit bloßem Auge erfassbar sind, ist davon auszugehen, dass genau solche mehrjährigen wenn nicht sogar Jahrzehntelangen genauen Messungen mittels mathematischer Mittelung und Teilung zu diesen hochgenauen Angaben führten. Auch wenn in manchen Fällen größere Abweichungen der Ergebnisse gegenüber modernen Nachrechnungen vorhanden sind, spricht dies nicht gegen die bereits gemessenen Genauigkeiten, sondern diese verdeutlichen eher den Fehlereinfluss von Messungen über lange Zeiträume, mit ggf. unterschiedlichen Instrumenten und der damals gewählten Art der Dokumentation

Die uns überlieferten Messungen des 8. Jhd v.Chr.²⁵ basieren im Gegensatz zu unseren heutigen Winkelangaben noch auf äußeren Maßen (dem Umfang) eines Bezugskreises. Gemessene Abschnitte, die Sehnen, mussten aber in der Summe der einzelnen Elemente auch wieder auf einen Vollkreis erweiterbar sein. Hierbei war dieses archäologisch belegte System bereits ein auf noch höhere Genauigkeit angepasstes Messsystem, welches aber weiterhin den festgelegten Wert für den scheinbaren Monddurchmesser als Grundlage hatte. Man kann also zeitlich betrachtet, das hierfür vorher erdachte Grundsystem, gegenüber dem bereits Angepassten, früher also circa in die späte 2. Hälfte des 2. Jahrtausends v.Chr. datieren.

Die uns überlieferten astronomischen Texte nutzten so ein Maßsystem, welches bei 6 Fingern, diesem scheinbaren Monddurchmesser entsprach. Man hatte also die Auflösung bzw. Genauigkeit des im vorhergehenden Absatz beschriebenen Grundsystems um den Faktor 6 erhöht.

1/6 des Grundmaßes für das astronomische System war nun gleichzusetzen mit einem Vollkreis aus 4050 dieser Teile. Die Verhältnisse zu den anderen beiden Systemen, die ebenfalls den Umfang dieses Kreises abbilden konnten, blieben dabei gewahrt [Fig. 2].

Bei Einhaltung exakter Proportionen entstand eine 24er Elle als reale Sehnenlänge, die einem heutigen Winkelmaß von $4 \times 0,533p3^\circ = 2,133p3^\circ$ entsprach.

Es ist hier noch einmal zu betonen, dass es zwar zu allen Zeiten unstrittig war, dass man den Kreis in Sexagesimal 6, bzw. 360 Teile oder dessen Vielfache zerlegen konnte, dass es aber zu diesem Zeitpunkt keinerlei feste Zuweisung zu einem 360er System gab. Die hier angegebenen Gradangaben dienen also nur der Erläuterung und besseren Vorstellung von der Aufteilung des Kreises. Die Aufteilung des Kreisumfangs erfolgte nur in entsprechende Sehnenabschnitte und deren Summierung zum Vollkreis.

²⁴ Kugler, 1900: 125ff.

²⁵ ADsD, 2018; Ossendrijver, 2012.

Die drei betrachteten Systeme im Überblick:

1. Das **innere** Bezugssystem: Das Gudeasystem. Für den Radius (Messschenkel) ist bei gleichem Multiplikator, hier 24, nur das Grundmaß $=1 = [60] / 2$ in den Radius = 30 zu teilen.

2. Das **äußere** Umfangsbasierte astronomische mondbasierte System:

ein scheinbarer Mond $\varnothing = 6$ astron. Finger = $0,533p3^\circ$; eine halbe gr.Elle (15) = $1,33p3^\circ$;

eine 24er astron. Elle = $2,133p3^\circ$; eine 30er astron. Elle = $2,666p6^\circ$; 1,5 astron. 30er Ellen = 4° ; $\ggg 4^\circ \times 90 = 360^\circ$ oder 4,5 halbe gr.Ellen (15) = 6° ; $\ggg 6^\circ \times 60 = 360^\circ$ (verschiedene andere Varianten möglich)

3. Das **äußere** Umfangssystem: Das Maßsystem der Nippurelle und die übliche 360er Teilung des Kreises. 360 Nippur Einheiten entsprechen durch die Streckung des Umfangs $375/360 = 375$ Gudea-Einheiten auf dem gleichen Umfang. Hier hat das Grundsystem bereits $360 \times 2 \times 6 = 4320$ Teile.

Dieses System ist zwar im Hintergrund auch durch die Verknüpfung zu den beiden anderen immer präsent, wurde aber zu diesem Zeitpunkt nicht genutzt.

Insgesamt konnten, wie dargelegt, die mit diesem astronomischen Maßsystem erfassten Kreisabschnitte immer zum vollen Umfang des jeweiligen Bezugskreises (Vollkreis) aufsummiert werden. Mit diesem Maßsystem wurden aber plausibel nur Messgeräte in der Größe von Teilkreisen zum Beispiel entsprechend einem Sechstel (Sextant) oder einem Viertel (rechter Winkel, Quadrant) genutzt. Die Messwerte konnten so in den Vollkreis „eingehangen“ bzw. bei beobachteten Bewegungen durch einfache Multiplikation mit 6 oder 4 auf den Vollkreis bezogen werden. Es war ebenso wichtig, dass diese Sektoren des Vollkreises sowohl im astronomischen Maßsystem, wie auch im Zeitsystem also der 360er Einteilung des Kreises sogenannte Koinzidenzpunkte, also vereinfacht betrachtet Übergangspunkte zwischen den Systemen hatten.

Als Referenzsystem für dieses astronomische Maßsystem kann man in Realmaßen folgendes ansehen:

Bei 11,93854m (24x Gudea (30) Elle) als Schenkellänge (Radius), ergibt sich als Sehne 0,11054m und entspricht so einem (1) scheinbaren Monddurchmesser (im heutigen Winkelmaß $0,533p3^\circ$). Dies sind durch die erhöhte Kreisteilung, 6 Finger des astronomischen mondbasierten Maßsystems. Für 24 Finger ergibt sich eine Elle mit einer Länge von 0,44210 m. Das entspricht wiederum im heutigen Winkelmaß $2,133p3^\circ$.

Hieraus lässt sich auch plausibel herleiten, weshalb nicht nur die 24er Teilung, sondern auch die Größe einem Ellenmaß entsprach und so auch zur Namensgebung der Einheit dieses astronomischen Systems führte.

Der genutzte Kreisumfang unter den bekannten Parametern: Kreiskoeffizient = 3 x Umfangsstreckung von *1.2.30*, entsprechen in dem hier genannten Referenzsystem:

$$74,61588\text{m} / 4500 = 1 \text{ Gudeafinger}$$

$$74,61588\text{m} / 4050 = 1 \text{ Finger der astronomische Elle, entspricht der späteren parth.-punisch-frührom. Elle}$$

$$74,61588\text{m} / 4320 = 1 \text{ Nippurfinger}^{26}$$

Dieses eigenständige astronomisch genutzte Maßsystem ist uns archäologisch mehrfach aus Kleinasien, Etrurien und Karthago überliefert. Das vermutlich noch viel ältere Maßsystem, wurde so genau in dieser Zeit wieder regional genutzt und ist uns neben den bereits Genannten, spätestens ab dem 6. Jhd. v.Chr. bekannt. Verschiedentlich wird dies auch als reduzierte römische (frühromische) Einheit benannt.²⁷ Dass dieses Maß tatsächlich auch der ‘Vater’ des späteren römischen Fußes ist, zeigt die Erläuterung im Folgenden.

Obwohl vertraut und zahlreich belegt, ist der Fuß und die Elle astronomisch genutzten Systems nicht völlig identisch, mit dem uns mehr vertrauten römischen System, welches spätestens durch Julius Cäsar verbindlich eingeführt wurde.²⁸ Das archäologisch einzuordnende Aufblühen dieses Maßes im römischen Imperium ist Ende des 2. bis Anfang des 1. Jhd. v.Chr. belegt. Exakt zu diesem Zeitpunkt gab es eine Präzisierung des Kreisumfangs in den mathematisch-astronomischen Berechnungen. Spätestens mit dem Berechnen der Sehnentafeln, die durch Ptolemäus im *Almagest* festgehalten sind, ist uns diese Anpassung auf eine etwas größere Umfangsstreckung auch schriftlich belegt. Der Umfang des Kreises wurde hierbei auf $377/360$, (entsprechend *1.2.50*²⁹), statt zuvor $375/360$ entsprechend *1.2.30* (was dem Verhältnis zwischen Nippur und Gudea Maßsystem entspricht), vergrößert. Dadurch entsteht für das bisherige astronomische Maßsystem ein etwas größeres Finger- und Ellenmaß. So ergibt sich für 24 Finger exakt die römische Elle von 0,4442m. Das hieraus resultierende Fußmaß, war der bekannte und in diversen Bauforschungen belegte, 0,2961m lange römische Fuß, der ‘Pes Monetalis’.

Zurückkehrend zum Referenzsystem des astronomisch genutzten Maßsystems, kann festgestellt werden, dass durch proportionale Verkleinerung und einfache praktische Erfordernisse sicher immer mehr vom eher als theoretisch anzusehenden Sehnenmaß, in der Größe dieser realen Elle abgerückt wurde. Dies ist bei der ‘ursprünglichen’ Größe einer solchen Messapparatur deren Sehne eine oder gar mehrere reale Ellen a 0,44210m ergeben sollte, logisch nachvollziehbar und für eine schnelle

²⁶ Quelle Kleb, 2016.

²⁷ Rottländer, 1979.

²⁸ Rottländer, 1979; Kirsch, 1993.

²⁹ Ptolemaeus, 1961.

Handhabung auch zwingend erforderlich. Ein vierfach verkleinertes Gerät mit nur 6 Gudea(30) Ellen als Schenkellänge (2,98463m), würde das Fingermaß dieses Mess- und Maß-systems (entsprechend 1/6 des angenommenen Monddurchmessers) immer noch mit einer realen Größe von 0,00461m ($\frac{1}{4}$ Finger) also 4,6 mm abbilden, was selbst für diese Zeit ohne weiteres erreichbar war. Ein solches Gerät mit der üblichen Länge und Einheit eines 'Messrohres' aus 6 Ellen, scheint für praktische Anwendungen jener Zeitepoche sehr plausibel.

Die Auflösung bzw. Genauigkeit eines solchen Systems bleibt aber selbst bei diesen verkleinerten Geräten gleich. 675 scheinbare Mond Durchmesser, das eigentliche Bezugsmaß dieses Systems, entsprechen weiterhin 6 Fingern auch bei verkleinertem Realmaß. Dieser entsprach so weiterhin den insgesamt 4050 Anteilen des betreffenden verkleinerten Kreisumfangs.

Der Übergang zum 360er Umfangsmaß als Vorstufe des Winkelmaßes bis 200 v.Chr.

In den folgenden Jahrhunderten wurde das astronomische Grundsystem jedoch optimiert und beim Bezugsmaß weiterentwickelt (Schritt 5). Sicher zeigte sich zum einen, dass der vermutlich aus dem Zeitbezug und der scheinbaren Bewegung heraus festgelegte Maßbezug des Monddurchmessers gegenüber dem real gemessenen zu ungenau war. Zum anderen und von deutlich größerer Bedeutung war jedoch, dass ein auf den 360sten Teil des Kreisumfangs bezogenes Maßsystem rechnerische Vorteile hatte. Gerade auch bzgl. der Harmonie eines solchen Maßsystems mit der gleich geteilten Zeit und den beobachteten Abläufen zeigten sich Vorteile.

Das astronomische Maßsystem des frühen 1. Jahrtausend v.Chr. behielt aber, mit Anpassungen wie bereits hier belegt, weiterhin seine hohe Bedeutung. Als erster Entwicklungsschritt wurde das ursprüngliche Referenzsystem des astronomischen Maßsystems gedrittelt. Aus dem im 8. Jhd. v.Chr. genutzten System von 1440 Fingern (60 x 24) wurde durch diese Verkleinerung, ein Durchmesser von 60 x 8. Für den Radius (30x8), dementsprechend das Messschenkelmaß, ergeben sich so 240 Gudeafinger = 3,9795m. Dies ergab für den als Grundmaß festgelegten Anteil des Kreises, der einem scheinbaren Mond Durchmesser entsprechen sollte, entgegen den vormals 6 Fingern, nun eine Sehne entsprechend 2 Fingern im bisherigen astronomisch genutzten Maßsystem. Diese 2 Finger = 0,036847 m, sind in ihrer realen Länge, nun aber auch sexagesimal 2.8 entsprechend 2,133p3 Finger des zwar immer im Umkreis ebenso existenten, aber bis dahin scheinbar nicht genutzten Nippur Ur-Maßsystems (a 0,017262m im Realmaß). Man erkennt hieraus bereits, dass bei diesen Proportionen 2 Nippur-finger auf dem Umfang exakt $30' = 0,5^\circ$ des späteren Winkelmaßes im Kreismittelpunkt abbilden. Ausgehend von diesem Grundkreis und seiner 360er Teilung, wurde zu diesem Zeitpunkt das Winkelmaßsystem festgelegt und für die zu-

künftige Verkleinerung der Messgeräte die feste Bindung an ein äußeres Maßsystem überflüssig, insoweit die Proportionen eingehalten wurden.

Der entscheidende Vorteil bestand deshalb auch im Wegfall des astronomischen auf dem Monddurchmesser basierenden Maßsystems, denn dieses System hatte eine Teilung des Vollkreises, der entgegen der eigentlich üblichen Vorstellungen ungleich 360 und dessen Vielfachen war. Um wieder an die 360er Teilung des Kreises anzugleichen verzichtete man auf die geradmaßige Referenzierung (exakt 2 Finger), über den scheinbaren Monddurchmesser.

Das auf dem gleichen Kreisumfang in 360er Teilung vorhandene, alte Nippur Maßsystem wurde dabei vermutlich nur 1-2 Jahrhunderte als Maßbezug genutzt, da es den Übergang zum neuen Winkelmaßsystem bildete. Die Größenverhältnisse des nun in solcher Weise 'feinjustierten' Messsystems, finden wir jedoch in den überlieferten Chaldäischen scheinbaren Mondgrößen wieder.

Die 2.7.26.23.20 für den mittleren scheinbaren Monddurchmesser, die Kugler intuitiv mit 4 multiplizierte um zu ihm vertrauten Gradangaben zu gelangen, sind in Wirklichkeit reale Sehnenmaße des Nippur Urmaßsystems, bei denen 1 Finger = $0,25^\circ = 15'$, 2 Finger $0,5^\circ = 30'$ und 2,1333 Finger die genau $0,5333^\circ = 32'$ entsprechen.

Genau dieser zeitliche Moment des Übergangs und der parallelen Existenz von 2 Maßsystemen bei manchen Messungen, wurde bereits von Epping Ende des 19. Jhds. analysiert und vermutet.³⁰ Diese Aussagen finden nun ihre inhaltliche Bestätigung mit den hier dargelegten Inhalten.

Kuglers intuitive und zumindest im Endergebnis auch richtige Vierteilung des gegebenen Wertes, soll der Vollständigkeit halber hier noch einmal Schrittweise nachvollzogen und geprüft werden. Kugler nahm den gegebenen Wert als, wenn auch vervierfachte, Gradangabe an.³¹ Dieses erscheint jedoch bei näherer Betrachtung der Verhältnisse zueinander eher unwahrscheinlich. Anhand des mittleren scheinbaren Monddurchmessers von 2.7.26.23.20 soll dies noch einmal dargestellt werden.

Wie dargelegt und mit den überlieferten astronomischen Daten belegt, wurden bis zu diesem Zeitpunkt Kreisabschnitte, also Sehnen, in Realmaßen (astron. Elle und Finger) gemessen. Die Summe der kleinsten Kreisabschnitte (oder deren übergeordneten Einheiten, zum Beispiel Ellen) bildeten einen Vollkreis.

Das Messsystem selbst entsprach genau festgelegten Proportionen von Messschenkel und Umfang des gedachten Kreises.

Bei einem 4fach vergrößerten System, würde man analog zur Zeit des 8. Jhd. v.Chr. also rund 600 Jahre früher, aber auch in der Zeit des Ptolemäus also rund 400 Jahre später, auch einen 4fach vergrößerten Messschenkel annehmen. Es sind hier also ganzzahlige Werte wie, zum Beispiel, analog zu Ptolemäus' Chorden Tafel

³⁰ Epping, 1889.

³¹ Kugler, 1900: 125-6: "der vierte Theil eines Grades".

$120 \times 4 = 480$, demzufolge im Radius $= 60 \times 4 = 240$ anzunehmen. Nutzen wir den Wert 2.7.26.23.20 im Dezimalen und betrachten dabei den gefundenen Winkelwert von $0^{\circ}31'51''36'''$, dann ergibt sich jedoch ein Messschenkel ungleich 240 (nur rund 230,4). Nehmen wir im umkehrten Fall den Messschenkel mit 240 fest an und nutzen die von Kugler errechnete Winkelgröße, so ergibt sich als Sehne nicht der ursprünglich angegebene chaldäische Zahlenwert.³²

Insgesamt erscheint gegenüber, der von Kugler einfach durch Division durch 4 vorgenommenen Umwandlung und den dementsprechend sehr abstrakten auf ein $\frac{1}{4}$ Winkelgrad bezogenen Zahlenwerten, die hier vorgestellte Lösung über reale Sehnenlängen deutlich plausibler. Einzig allein dadurch, dass der chaldäische Zahlenwert im exakt gleichgeteilten Maßsystem auf dem Umfang, wie das spätere Winkelmaß im Kreismittelpunkt angegeben ist, ist Kuglers Ergebnis im Endergebnis dennoch korrekt.

Es handelt sich hier dementsprechend eindeutig um reale Sehnenmaße des zuvor beschriebenen Messsystems angegeben im Nippur-maß.

Auch hier, dieses gedrittelte (siehe Anfang dieses Abschnitts) System des 2.Jhd. v.Chr. in Realmaßen:

$8 \times \text{Gudea}(30) \text{ Elle} = 3,97951\text{m} \times 3 \times 375/360$ [entsprechend der babylonisch genutzten Kreiszahl 3,125] = 12,436m als Kreisumfang. Dies im Verhältnis des Nippur Maßsystems also 360 geteilt = 2 Finger (entsprechend $30'$ bzw. $0,50^{\circ}$). Dies sind im Realmaß des Nippursystems $2 \times 0,01727\text{m} = 0,03454\text{m}$. Solch ein Fingermaß aber mit $2,133\text{p}3$, entsprechend sexagesimal 2.8 multipliziert = 2.8 Finger (bzw. auch $0,25^{\circ} \times 2,133\text{p}3 = 0,533\text{p}3^{\circ}$), sind real entsprechend 0,03684m. Dies entspricht so dem ursprünglich festgelegten scheinbaren Monddurchmesser, als Bezugsgröße, im Realmaß des Nippursystems.

Das exakt gefundene Maß der chaldäischen Astronomen des 2. Jahrhunderts v. Chr. für den mittleren scheinbaren Monddurchmesser war aber statt der ehemaligen Bezugsgröße des Vorgängersystems (Pkt.3.2.2) von sexagesimal 2.8, real nur 2.7.26.23.20. (dezimal 2,12399...) [Fig. 3] also $0^{\circ}31'51''36'''$.

Dieser Wert stellt sich gerade für diese frühe Zeit als besonders beachtenswert und sehr präzise heraus!

Dieses Messsystem welches uns mit den scheinbaren Monddurchmessern der Chaldäer aus seleukidischer Ära archäologisch belegt ist,³³ stellt so bereits den Beginn des eigenständigen Winkelmaßes dar, da sich hier die feste Kopplung zwischen Sehne eines 360er Maßsystems auf dem Umfang und der 360er Teilung des Vollkreises manifestiert.

³² Kugler, 1900: 126.

³³ ADsD, 2018; Kugler, 1900: 126.

Aus Sicht des Autors hat dieses System eine besondere Bedeutung wurde doch auch die Synchronität mit der Zeiteilung wiederhergestellt und damit mit hoher Wahrscheinlichkeit auch die Namensgebung der Einheiten des Winkelmaßes beeinflusst.

Die altgriechischen μοῖραι, die römischen Parzen, die englischen Parts entsprechen inhaltlich unserem Grad und so einem Anteil des Kreises. Die spätere Untereinheit 'Minuten' die in diesem Messsystem noch $0,25^\circ$ entsprach, hatte durch seine Zeitsynchronität auch einen Zeitwert von 1 Minute, da die Sonne in einer Minute diesen Winkelanteil im Tageslauf zurücklegt.

Hypsikles aus Alexandria, wird mit der erstmaligen Nutzung des eigenständigen Gradmaßes um 175 v.Chr. in Verbindung gebracht, was zumindest zeitlich mit dem hier genutzten chaldäischen Messsystem übereinstimmt.³⁴ Weshalb Hypsikles Präzision jedoch im Vergleich deutlich geringer ist, kann an dieser Stelle jedoch noch nicht geklärt werden.³⁵

Dabei könnte im Gegensatz die scheinbar erreichte Präzision der chaldäischen Messungen überraschen, denn Kugler führt aus, dass die Geschwindigkeit bzw. scheinbare tägliche Verschiebung des Mondes sich ändert, wenn man eine Größenänderung des scheinbaren Monddurchmessers von einer Winkelsekunde feststellt.³⁶ Dies sind selbst bei dem hier vorliegenden Messsystem mit 3,9795m Messschenkel nur 2/100stel mm. Diese Genauigkeit ist jedoch, unabhängig von einer über Zahnräder übersetzten eventuellen Ablesung, mit bloßem Auge über die Zieleinrichtung am Messschenkel nicht unterscheidbar. Es muss sich hier demzufolge einen theoretischen Wert handeln.

Die Festlegung des Winkelmaßes zur Vereinfachung der Messungen um 200 v.Chr.

Der letzte Entwicklungsschritt zum maßstabsunabhängigen Winkelsystem hin, wurde durch 2 kleinere Anpassungen des vorherigen Systems durchgeführt. Von den 2 Fingern für $1/720$ Kreisanteil ($0,5^\circ$), wurde über 1 Finger zu $1/720$ Kreisanteil, der Messschenkel neuerlich halbiert und wiederum nochmals zu 1 Finger auf $1/360$ Kreisanteil ($=1^\circ$) abschließend vollzogen. Damit gab es ein Verhältnis von 1 Finger des Nippur Maßsystems, zu 1 Einheit des neuen Systems, dem Winkelmaß in Grad.

Auch diese Messsysteme sind uns wiederum textlich überliefert, denn sowohl Hipparch, wie Heron und auch Ptolemäus loben die Vorteile einer 4 Ellen langen Dioptra als Messgerät.³⁷

Dennoch beziehen sich deren Aussagen wohl auf zwei verschiedene Geräte, zum einen (die erste Anpassung) auf ein 4 Ellen im Messschenkel langes Gerät und

³⁴ Siehe auch Lelgemann, 2014.

³⁵ Manitius, 1888: XVII.

³⁶ Kugler, 1900: 164.

³⁷ Hultsch, 1899: 200; Lewis, 2001: 39; Kleb, 2019; Odenwald, 2019.

zum anderen auf ein nochmals halbiertes System mit 2 Ellen pro Messschenkel, wie es auch die Sehnentafeln des Ptolemäus implizieren.

Ein Messsystem wie von Hipparch beschrieben, hatte einen Messschenkel von 4 Ellen, dementsprechend 1,98975m und bildet bei einem halben Grad den Finger des Nippur Maßsystems als Sehnenlänge auf dem Kreisumfang ab. Hipparchs Messgerät selbst, war sogar speziell nur für die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond konzipiert. Durch die Eingrenzung des Seh winkels konnte bei diesem Messgerät der scheinbare Durchmesser entlang der 4 Ellen langen Dioptra bestimmt werden. Kepler beschreibt im 16. Jhd AD, das man bei richtiger Nutzung mit der bereits von Hipparch genutzten Dioptra gute Ergebnisse erzielen konnte.³⁸ Kepler machte diese Aussage genau im Zusammenhang mit den scheinbaren Durchmessern des Mondes. Der herausragende Astronom des Mittelalters konnte diese Durchmesser, obwohl rund 1800 Jahre nach den chaldäischen Astronomen in Mesopotamien lebend, auch nur mit nahezu gleicher Genauigkeit bestimmen.³⁹ Dass hierbei bei Hipparchs Dioptra entgegen der Annahme von Hultsch⁴⁰ ebenfalls eine 30er Elle für den Messschenkel anzusetzen ist, ergibt sich klar aus den Darlegungen in dieser Arbeit und auch den bei Ptolemäus dargelegten Proportionen.

Ein Messsystem mit einem Durchmesser von 120 wie in den Sehnentafeln von Ptolemäus angegeben, besteht so aus 4 üblichen 30er Ellen. So auch Heron in seinem Werk *Über die Dioptra* der die 4 Ellen lange Dioptra mittig also in 'zwei gleiche Hälften geteilt' einpasst.⁴¹ Der Messschenkel hat damit die Länge einer Doppel-elle (60). Im inneren Gudeasystem entspricht dies der Länge des Sekundenpendels von 0,99488m. Hierbei wird ein Finger des äußeren Nippursystems von 0,01727m exakt bei 1/360 des Vollkreises (=1°) gemessen. Wie sich aus den Sehnentafeln ergibt, wurde zumindest im theoretischen System dieser Tafeln 1/60 dieses Fingermaßes messbar (1 Winkelminute). Da hierbei aber bereits das Winkelmaß zugrunde liegt, kann der Wert des Radius von 60 = 1 auch jede andere Einheit annehmen. Ob 1 Doppel-elle, 1 Klafter/Orgija, 1 Messruthen oder 1 Akaina, um an dieser Stelle nur beispielhaft griechische Maße zu nennen, hing hierbei nur noch vom jeweiligen Anwendungszweck und Genauigkeitsanspruch ab.

Zusammenfassung und Diskussion

Die Entwicklung des Winkels als eigenständiges Maß, diene demzufolge der Vereinfachung und ist nur der fortwährenden Bedeutung und damit verbundenen Beobachtung der Himmelskörper geschuldet. Alle aufgezeigten Entwicklungsschritte

³⁸ Kepler, 1859: 348.

³⁹ So auch die Analyse von Kugler (1900: 126).

⁴⁰ Hultsch, 1899.

⁴¹ Herons von Alexandria, 1903: 191-6.

der Messung an Kreisen, beginnend mit Steigungsdreiecken im einfachen Horizontsystem, über Sehnen als Kreisabschnitte für verschiedene, aber gleich große und dennoch beliebig geneigte Bezugsebenen, führten nur im Zusammenhang mit dieser zunehmenden Bedeutung der Himmelsbeobachtung und der notwendigen stetigen Vereinfachung der Messungen, zur Entstehung dieses Maßstabsunabhängigen Maßsystems.

Dabei waren die schon am Ende des 3. Jahrtausends v.Chr. eingeführten Anpassungen und die Nutzung von Verhältniswerten bei rechtwinkligen Dreiecken, die logischen Vorstufen und ersten archäologischen Belege dieser Entwicklung. Die in Realmaßen festgehaltenen Sehnenabschnitte waren später und wie dargelegt die unmittelbaren Vorstufen des noch heute genutzten Winkelmaßes.

Aus heutiger Sicht und am Ende dieser Arbeit könnte man sich die Frage stellen, weshalb die hier dargelegten und größtenteils auch archäologisch belegbaren Schritte notwendig waren? Denn schon aus Gudea von Lagash's Maßreform lässt sich entsprechend des Verhältnisses der Maßsysteme 1.2.30 eine Teilung des Kreises in 21600 (360x60) Teile erkennen. Ptolemäus Sehnentafeln über 2000 Jahre später beziehen sich ebenso nur auf diese Teilung jedoch bei angepasster Umfangsstreckung 1.2.50. Zusätzlich liegt doch die 360er Teilung des Kreises auch beiden dieser Systeme zugrunde, weshalb waren dann die Zwischenschritte nötig?

Beides sind jedoch, zwar mathematisch völlig korrekte, aber zumindest zunächst auch nur theoretisch ermittelte, Wertesysteme. Und so liegt hier die Antwort mit hoher Plausibilität in der real messbaren, also erreichbaren Genauigkeit einer Messapparatur in den jeweiligen Jahrhunderten dazwischen. Durch stetige Verkleinerung der Proportionen wird uns die jeweils erhöhte messbare Präzision dargelegt.

Durch das astronomische Maßsystem des 8 Jhds. v.Chr., wurde zwischenzeitlich selbst ein im heutigen Wert weniger als 6 Winkelminuten großer Sehnenabschnitt sicher und in realem Fingermaß (bzw. nochmals verkleinert $\frac{1}{4}$ davon) messbar. Weitere Optimierungsschritte brachten dann jedoch wieder eine Abkehr von diesem, durch Mond oder Sonne am Himmel gut referenzierbaren Messsystem und auch von der immer weiteren Teilung des Kreises.

Es erscheint plausibel, das hier im Weiteren mehr auf die Wiederherstellung der 360er Kreisteilung abgezielt wurde und so auch wieder ein Bezug zu den Zeiteinheiten bzw. dem Sonnentag neu hergestellt werden sollte.

Durch die Entwicklung der Mechanisierung wurden zusätzlich auch deutlich kleinere Anteile der Fingermaße messbar. Ein sehr gutes Beispiel hierfür haben wir mit dem rekonstruierten Mechanismus von Antikythera vor uns, der uns für das 2 Jhd. v.Chr. eindrucksvoll den bereits erreichten astronomischen Kenntnisstand,

aber hier für uns im Speziellen interessant, das hohe feinmechanische und angewandte Können jener Zeit präsentiert.⁴²

Die in Ptolemäus' Sehnentafeln enthaltenen Werte, die vermutlich auch schon älter als das eigentliche Werk die *mathematiké syntaxis*, das *Almagest* selber sind, beziehen sich so wie Eingangs erwähnt, zwar auf den gleichen Bruchteil des Kreises wie bereits in altbabylonischer Zeit, doch konnte dieser trotz der deutlich kleineren Messapparatur scheinbar sicher bestimmt werden. Da dieser 21600ste Teil, also 1 Winkelminute, dann bei der 4 Ellen langen mittig gelagerten Dioptra nur noch rund $\frac{1}{4}$ mm lang wäre, kann man von einer mechanisierten über Zahnräder übersetzten Ablesehilfe, wie durch den oben genannten Mechanismus auch archäologisch belegt, ausgehen. Auch Heron von Alexandria beschreibt zumindest im Ansatz solche feinmechanischen Baugruppen (Zahnräder, Schnecken, Schraubgewindehub) an seiner *Dioptra*.⁴³ In der folgenden Zeit wurde das Winkelmaßsystem auch wieder an größeren Messsystemen und mit anderen Maßeinheiten genutzt, da diese nicht mehr feste Bestandteile der Berechnungen waren, sondern nur noch quasi den Maßstab vorgaben. Somit konnten auch weitere Verfeinerungen oder Anteile des Winkelmaßes besser messbar gemacht werden. Der wirklich limitierende Faktor war jedoch die Auflösung bzw. Differenzierbarkeit des Menschlichen Auges, diese liegt zwischen $45''$ und $1'$, demzufolge bestand bis zur Nutzung von Linsen zur optischen Vergrößerung, keine Notwendigkeit über eine verbesserte Stabilität oder Präzision der Messgeräte selbst hinaus, kleinere Winkelanteile messbar zu machen.

Zum Abschluss dieser Arbeit sei nochmals neben der nun im Detail dargelegten, sehr frühen Nutzung von Dreiecken im Kreis, zur Beschreibung von Positionen über dem jeweiligen Horizont und auf dem gedachten Kreisumfang (im astronomischen im einfachsten Fall als Höhe bezeichnet), auch auf die ständig damit verbundenen Veränderungen in der Vorgangsweise des Ablesens hingewiesen.

Hierbei war der Schritt von Stufe 5 zu 6 [Tab. 2], wohl der Einschneidendste, denn hierbei wurden die wie gewohnt abzulesenden Kreis- also Sehnen-abschnitte auf dem Umfang gegen das maßstabslose Winkelsystem im Kreismittelpunkt ersetzt. Das hierbei selbst bei einem Astronomen und Mathematiker wie Ptolemäus vielleicht aus der Gewohnheit der alten Maße heraus, oder aus der Übernahme von älteren Daten eines Anderen, oder auch unverschuldet aus später erfolgter falscher Transskription heraus, Fehler unterlaufen sein könnten, zeigt folgende zuletzt zur Diskussion gestellte Analyse.

⁴² de Solla Price, 1974; Edmunds, *et al.*, 2000.

⁴³ Herons von Alexandria, 1903: 192-8.

Bereits vielen Wissenschaftlern des Altertums und der Moderne fiel auf, dass Ptolemäus' Angaben zu den scheinbaren Durchmessern des Mondes im Vergleich zu Anderen seiner Zeit sehr unpräzise waren.⁴⁴

Nach Ptolemäus Angaben liegt das Maximum bei $35^{\circ}20''$, das Minimum bei $31^{\circ}20''$ und das Mittel so bei $33^{\circ}20''$. Diese Angaben sind aber sämtlich auch für Ihre Zeit zu groß.

Nehmen wir diese Werte jedoch als die älteren und wohl noch eher gewohnten Sehnenmaße an und benutzen die von Ptolemäus selbst veröffentlichten Sehnentafeln zu deren Transformation, so ergibt sich eine erstaunliche Übereinstimmung nicht nur mit den Werten seiner Zeitgenossen, sondern auch mit den chaldäischen scheinbaren Monddurchmessern, die bereits ca. 300 Jahre vor Ptolemäus Angaben bestimmt wurden [Tab. 3].

Haben wir es hier demnach eigentlich mit den alten Sehnenmaßen und nicht mit neuen Werten im Winkelmaß zu tun?

⁴⁴ Einen guten Überblick verschafft uns Kugler (1900: 126).

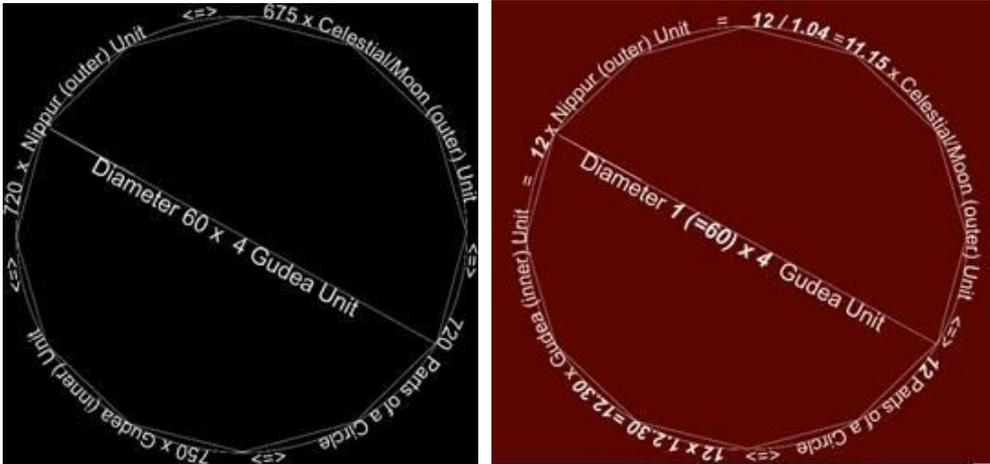


Fig. 1. Das anfängliche Grundsystem des späten 2. Jahrtausends v.Chr., links dezimal | rechts Sexagesimal, mit 1 scheinbaren Monddurchmesser als Grundmaß ($0^{\circ}32' = 0,533p3^{\circ}$). ©J.Kleb 2023



Fig. 2. Das entwickelte astronomische Maßsystem 8. Jhd. v.Chr., links Dezimal | rechts Sexagesimal. Hier entsprach die Grundeinheit ebenfalls $0^{\circ}32' = 0,533p3^{\circ}$ = dies waren jedoch 6 Finger des Systems. ©J.Kleb 2023

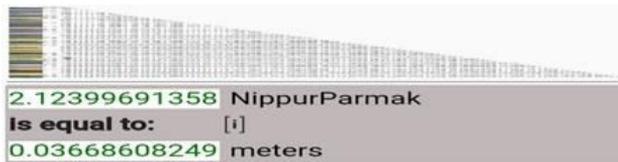


Fig. 3. Der chaldäische mittlere scheinbare Monddurchmesser in Fingern (Parmak türk.) des Nippurmaßes und im Realmaß in m. ©J.Kleb 2023

Table 1. Die wichtigsten Maßsysteme mit deren 30er Ellen, 24er Ellen, Fußmaß (16) und Finger

		30er Elle	24er Elle	Fußmaß (16)	Finger	Besonderheiten
‘äußeres’ zeitgebundenes Längensystem	Ursystem Nippurmaß	0,51816m	0,41453m	0,27636m	0,017272m	u.a. Nippurelle
	Astronomisches Maßsystem auch später parth.-punisch (frühröm.)	0,55271m	0,44217m	0,29478m	0,018424m	u.a. Karthago 30erElle= 32erNippur
‘inneres’ geometrisch angepasstes Längensystem	Gudeamaße	0,49744m	0,39795m	0,26530m	0,016581m	u.a. Gudea- statuen 30erElle = 24erPhilet.
U m 200v.Chr. -100v.Chr. angepasstes System		0,55518m	0,44414m	0,29609m	0,018506m	System des Roman Pes Monetalis

Die in dieser Arbeit verwendeten Maße, wurden durch den Autor mit zahlreichen weiteren im Jahr 2014-16 neu zusammengestellt und nachgerechnet. Diese sind in Ihren Umrechnungen zueinander online über www.siliqua.de/unit-conversions überprüf- und abruf-bar

Table 2. Die Entwicklungsschritte von der Dreiecks- bis zur Winkel-messung im Einzelnen

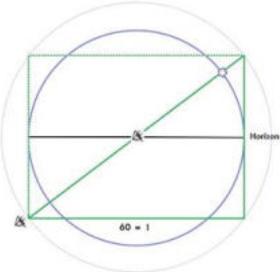
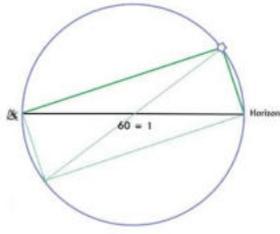
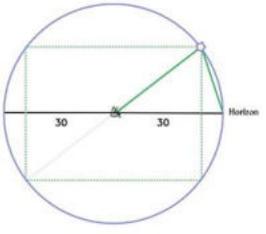
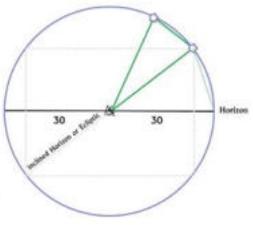
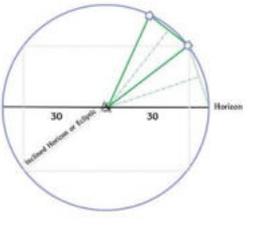
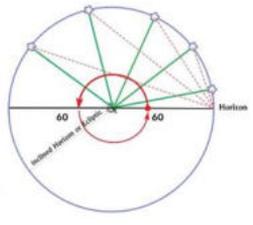
<p>Schritt 1: Die Bestimmung des Ortes /Platzes [akk. 'Ki'] am Himmel über die Steigungsverhältnisse im eingeschriebenen Dreieck, mittels der Diagonale und bei festgelegter Basis von $60 = 1$.</p>	<p>Schritt 2: Die Bestimmung des Ortes am Himmel über die Steigungsverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck bei festgelegter Diagonale von $60 = 1$.</p>	<p>Schritt 3: Die Bestimmung des Ortes /Platzes [akk. 'Ki'] am Himmel, bei Halbierung des Durchmessers und dementsprechender Auffassung als Kreissehne/Kreisabschnitt zum Horizont.</p>
		
<p>Schritt 4: Die Bestimmung der Sternen-/Himmels-orte mittels Sehnenabschnitten auf beliebigen im Mittelpunkt zentrierten Kreisebenen und einem festgelegten Maßsystem auf dem Umfang.</p>	<p>Schritt 5: Die Bestimmung der Sternen-/Himmels-orte bei stetiger Verkleinerung der Sehnenabschnitte und Angleichung der Anzahl von Sehnen in Realmaßen und Kreisabschnitten.</p>	<p>Schritt 6: Die Bestimmung der Sternen-/Himmels-orte nach Verdopplung des Radius und Gleichsetzung der Anzahl von Kreis und Längenteilen, über das neue Winkelmaß und seine Sehnenlängen.</p>
		

Table 3. Gegenüberstellung der Chaldäischen mit den transformierten Ptolemäischen Werten

Winkelangaben bis auf Winkelsekunden gerundet	Minimum	Maximum	Mittel
Chaldäische scheinbare Monddurchmesser aus der Zeit Hipparchos (ca. 200v.Chr.) ⁴⁵	0°29'27"	0°34'16"	0°31'51"
Transformierte Winkelmaße aus den Ptolemäischen Angaben	0°29'55"	0°33'45"	0°31'50"

Die Grundannahmen/Werte sind allesamt aus Ptolemäus *Almagest*, bzw. Kugler (1900) entnommen.

Danksagung

Ich bedanke mich bei allen Wissenschaftlern und Freunden die mich bei der Arbeit und Umsetzung dieses Artikels unterstützt haben.

Besonders bedanke ich mich bei meiner Frau Nicole für die Zeit, die sie mir für diese Forschungsarbeit geschenkt hat.

⁴⁵ Kugler, 1900: 126.

Literaturverzeichnis

Quellen

- Herodotus. *The Histories*. translated by A. de Sélincourt. Harmondsworth: Penguin Books, 1954.
- Herons von Alexandria. *Herons von Alexandria's Vermessungslehre und Dioptra. Über die Dioptra*. edited and translated by H. Schöne. Leipzig: Teubner, 1903.
- Ptolemaeus. *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia*. edited by J.L. Heiberg, F.J. Boll, E. Boer, W. Hübner. Leipzig: Teubner, 1961.

Literatur

- ADsD. Astronomical Diaries Digital [<http://oracc.museum.upenn.edu/adsd/>; accessed January 2, 2023]
- Brack-Bernsen, L. (1997). *Zur Entstehung der babylonischen Mondtheorie*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
- Bruins, E.M., Rutten, M. (1961). *Textes mathématiques de Suse*. Paris: Geuthner.
- DCCMT. Digital Corpus of Cuneiform Mathematical Texts [<http://oracc.ub.uni-muenchen.de/dccmt/corpus>; accessed January 2, 2023]
- de Solla Price, D. (1974). Gears from the Greeks. The Antikythera Mechanism: A Calendar Computer from ca. 80 B.C. *Transactions of the American Philosophical Society*, 64(7), 1–70. <https://doi.org/10.2307/1006146>
- Edmunds, M., Seiradakis, J., Moussas, X., et al. (2000). Antikythera Mechanism Research Project. [<https://www.antikythera-mechanism.gr/>; accessed February 1, 2023]
- Epping, J. (1889). *Astronomisches aus Babylon oder das Wissen der Chaldäer über den gestirnten Himmel mit Copien der einschlägigen Keilschrifttafeln und anderen Beilagen*. Freiburg im Breisgau: Herder.
- Fatoohi, L.J., Stephenson, F.R. (1997). Angular measurements in Babylonian astronomy. *Archiv Für Orientforschung*, 44/45, 210–4. <http://www.jstor.org/stable/41670130>
- Graßhoff, G., Ossendrijver, M. (2017). Ein antikes Großforschungsprojekt. *Spektrum der Wissenschaft: Spezial Archäologie, Geschichte, Kultur*, 4, 58–65.
- Hultsch, Fr. (1899). Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra. *Abhandlung zur Geschichte der Mathematik*, 9, 193–209.
- Hunger, H., Pingree, D. (1989). *Mul.Apin: An Astronomical Compendium in Cuneiform*. Horn: F. Berger & Söhne.
- Kepler, J. (1859). *Joannis Kepleri astronomi opera omnia*. vol. 2. Frankfurt a. M.: Heyder & Zimmer.
- Kirsch, J.H. (1993). *Villa dei Misteri*. PhD diss., University of Freiburg.
- Kleb, J. 2016. Ancient Linear Dimensions. an Unit Conversion Project [<https://www.keration.de/das-projekt>; accessed January 22, 2023]
- Kleb, J. (2019). A critical Analysis of the Reconstructions from Herons Dioptra, published during the 18th until 20th Century. (on-line. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15237.58087>)
- Kleb, J. (2021). On the evidence of a trigonometric function value system in Babylon. *History and Overview (math.HO)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.13379>
- Kleb, J. (2022). Geometrische Konstanten und griechische Mathematiktheoreme auf altbabylonischen Keilschrifttafeln - Eine Darlegung anhand von 7 Beispielen. *Cuneiform Digital Library Preprints*, 2022(25.0). <https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/articles/cdlp/25.0>
- Kugler, F.X. (1900). *Die babylonische Mondrechnung : zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne; mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln*. Freiburg i. Br: Herder.

- Lelgemann, D. (2014). Das heliozentrische Weltbild in der Antike. *Leibniz Online, Wissenschaftliche Internet-Zeitschrift der Leibniz-Sozietät e. V.*, 16. [https://leibnizsozietat.de/wp-content/uploads/2014/04/lelgemann.pdf; accessed January 2, 2023]
- Lewis, M.J. (2001). *Surveying instruments of Greece and Rome*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Manitius, K. (1888). *Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Überlieferung und Inhalt kritisch behandelt*. Dresden: Lehmann.
- Neugebauer, O. (1954). Babylonian Planetary Theory. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 98(1), 60–89. <http://www.jstor.org/stable/3143671>
- Odenwald, S. (2019). *Space exploration. A history in 100 objects*. New York: The Experiment.
- Ossendrijver, M. (2011). Der Himmel über Babylon. Astronomie im Alten Orient. In E. Seidl, P. Aumann, F. Duerr (Eds.), *Der Himmel. Wunschbild und Weltverständnis: Begleitband zur gleichnamigen Ausstellung* (pp. 151–8). Tübingen: Museum der Universität Tübingen.
- Ossendrijver, M. (2012). Science, Mesopotamian. In R. Bagnall et al. (Eds.), *The Encyclopedia of Ancient History* (pp. 6070–2). Wiley Online. <https://doi.org/10.1002/9781444338386.wbeah21289>
- Ossendrijver, M. (2020). The Moon and Planets in Ancient Mesopotamia. In *Oxford Research Encyclopedia of Planetary Science*. <https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190647926.013.198>
- Rogers, E.M. (1960). *Physics for the inquiring mind. The methods, nature and philosophy of physical science*. Princeton: Princeton University Press.
- Rottländer, R.C.A. (1979). *Antike Längenmaße. Untersuchungen über Ihre Zusammenhänge*. Braunschweig: Vieweg.
- Rottländer, R.C.A. (2006). Vormetrische Längeneinheiten. [https://www.vormetrische-laengeneinheiten.de/; accessed January 22, 2023]
- van der Waerden, B.L. (1942). Die Berechnung der ersten und letzten Sichtbarkeit von Mond und Planeten, und die Venustafeln des Ammisaduqa, *Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 94, 23–56.
- Walden, P. (1931). *Mass, Zahl und Gewicht in der Chemie der Vergangenheit; ein Kapitel aus der Vorgeschichte des sogenannten quantitativen Zeitalters der Chemie*. Stuttgart: F. Enke.
- Watson, R., Horowitz, W. (2011). *Writing science before the Greeks: a naturalistic analysis of the Babylonian astronomical treatise MUL.APIN*. Leiden & Boston: Brill.
- Waziry, A. 2016. Probability Hypothesis and Evidence of Astronomical Observatories in Ancient Egypt. *Journal of Social Sciences and Humanities*, 2(2), 31–50.
- Weir, J.D. (1982). The Venus Tablets: A Fresh Approach. *Journal for the History of Astronomy*, 13(1), 23–49. <https://doi.org/10.1177/002182868201300103>

To cite this article: Kleb, J. (2023). Himmelsbeobachtungen und deren Messung, von der Regierungszeit des Gudea von Lagash bis zum *Almagest* des Claudius Ptolemäus. *Historia i Świat*, 12, 209–236. <https://doi.org/10.34739/his.2023.12.13>



© 2023 The Author(s). This open access article is distributed under a Creative Commons Attribution (CC BY-ND) 4.0 license.